

IOI 1996 2.3 – Quadrati magici

Massimo Santini

1 settembre 2000

1 Problema

Seguendo il successo del suo “cubo magico”, Rubik ha inventato la sua versione planare, chiamata “quadrati magici”. Questo è una scacchiera composta da otto quadrati della stessa dimensione disposti in due file da quattro; in questo problema consideriamo una versione del gioco in cui ogni quadrato ha un diverso colore e, per comodità, denotiamo gli otto colori con i primi numeri interi positivi:

1	2	3	4
8	7	6	5

Una *configurazione* del quadrato è data dalla sequenza di interi positivi ottenuta leggendo in senso orario i numeri di ciascun quadrato a partire dall’angolo in alto a sinistra, così, ad esempio, la configurazione della scacchiera riportata qua sopra è (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Questa è chiamata la *configurazione iniziale*.

Ad ogni configurazione della scacchiera, possono essere applicate tre *trasformazioni di base*, identificate dalle lettere “A”, “B” e “C”: “A” corrisponde a scambiare la riga superiore con quella inferiore, “B” a uno “scorrimento” di una singola posizione del rettangolo verso destra e “C” ad una rotazione in senso orario del centro della scacchiera. Si osservi che tutte le configurazioni possibili della scacchiera si possono ottenere applicando (secondo una opportuna sequenza) le tre trasformazioni di base.

Per chiarezza, riportiamo di seguito l’effetto che ciascuna delle trasformazioni di base ha sulla configurazione iniziale:

trasformazione “A”:	8	7	6	5
	1	2	3	4

trasformazione “B”:	4	1	2	3
	5	8	7	6

trasformazione “C”:	1	7	2	4
	8	6	3	5

Il compito assegnato consiste nel calcolare una sequenza di trasformazioni di base che portino la configurazione iniziale in una configurazione assegnata (compito “A”). Sarà dato ulteriore punteggio alle soluzioni il cui numero di trasformazioni utilizzate non eccede 300 (compito “B”).

1.1 Dati in ingresso

Il file INPUT.TXT contiene sulla prima linea 8 interi positivi che rappresentano la configurazione assegnata.

1.2 Dati in uscita

Sulla prima linea del file OUTPUT.TXT deve essere scritta la lunghezza l della sequenza di trasformazioni individuata. Sulle restanti l linee deve essere riportata, una per linea, la lettera (“A”, “B”, o “C”) che identifica quale tra le trasformazioni di base è stata utilizzata nella sequenza.

1.3 Esempio

A fonte del file INPUT.TXT contenente

2 6 8 4 5 7 3 1

il file OUTPUT.TXT può avere il seguente contenuto

7
B
C
A
B
C
C
B

2 Soluzione

Le possibili configurazioni corrispondono alle permutazioni dei primi otto interi, sono cioè $8! = 40320$; possiamo quindi fissare una qualche biiezione tra le configurazioni e l'insieme $V = \{0, 1, \dots, 40320\}$ in modo da poterci riferire allo stesso modo ad uno membro di V , o ad una configurazione.

Ad esempio, ordinando lessicograficamente le permutazioni (come si fa con le parole in un dizionario), possiamo associare a ciascuna configurazione la sua posizione nell'ordine.

Il problema può essere quindi riformulato facendo uso dei grafi: sia $G = \langle V, E \rangle$ il grafo orientato tale $E \subseteq V^2$ contiene l'arco (i, j) se e solo se (la configurazione corrispondente a) j può essere ottenuta applicando una delle trasformazioni di base a (la configurazione corrispondente a) i . Si osservi che, essendoci 3 trasformazioni di base, il grafo G avrà un numero fisso di archi uscenti per ogni nodo pari a 3.

Il problema può quindi essere risolto trovando il cammino minimo tra il nodo corrispondente alla configurazione iniziale a quello corrispondente alla configurazione assegnata.

Ci sono quindi tre sottoproblemi:

1. calcolare la biiezione tra V e le configurazioni;
2. calcolare il grafo G ;
3. risolvere il problema dei cammini minimi per G .

Il primo punto può essere risolto come accennato: generando a caso tutte le permutazioni, immagazzinandole¹ in un vettore ed ordinandolo lessicograficamente. La trasformazione tra un intero e la configurazione corrispondente sarà risolta quindi con un accesso al vettore; viceversa, usando una ricerca dicotomica, sarà possibile determinare l'intero corrispondente a ciascuna configurazione. La parte più complicata di tale sottoproblema corrisponde alla generazione delle permutazioni² (assumendo che sia semplice, o che si possano usare funzioni di libreria, per l'ordinamento e la ricerca binaria).

Una volta ottenuta la biiezione è immediato calcolare la matrice di adiacenza del grafo G . Poiché per risolvere il terzo punto è necessario utilizzare solo le informazioni sugli archi uscenti, e avendo G grado costante, l'informazione necessaria può essere rappresentata tramite una matrice $|V| \times 3$.

Il terzo punto può essere risolto tramite una visita in ampiezza di G fatta a partire dal nodo corrispondente alla configurazione iniziale (lo 0, visto l'ordine lessicografico) fino a raggiungere il nodo corrispondente alla configurazione assegnata. In fine, a partire dal cammino, è semplice individuare la sequenza di trasformazioni (ossia la scelta degli archi) fatta lungo il suo percorso.

¹Ad esempio, rappresentando ogni configurazione con una stringa di 8 caratteri, per uno spazio totale richiesto di $|V| \times 8$ caratteri.

²La generazione delle permutazioni può essere ottenuta banalmente tramite 8 cicli innestati, o più elegantemente, come suggerito a pag. 657 del testo in dotazione "Algoritmi in C".

Il contenuto di questo documento è protetto dalle leggi sul copyright e dalle disposizioni dei trattati internazionali. Questo documento può essere copiato (o comunque riprodotto) ed utilizzato liberamente dagli studenti, dagli istituti di ricerca, scolastici ed universitari afferenti ai Ministeri della Pubblica Istruzione e dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica per scopi istituzionali, non a fine di lucro. Ogni altro utilizzo o riproduzione (ivi incluse, ma non limitatamente a, le riproduzioni a mezzo stampa, su supporti magnetici o su reti di calcolatori) in toto o in parte è vietata, se non esplicitamente autorizzata per iscritto, a priori, da parte dell'autore.

L'informazione contenuta in questo documento è ritenuta essere accurata alla data della pubblicazione. Essa è fornita per scopi meramente didattici e non per essere utilizzata in progetti di impianti, prodotti, ecc. L'informazione contenuta in questo documento è soggetta a cambiamenti senza preavviso. L'autore non si assume alcuna responsabilità per il contenuto di queste pagine (ivi incluse, ma non limitatamente a, la correttezza, completezza, applicabilità ed aggiornamento dell'informazione). In ogni caso non può essere dichiarata conformità all'informazione contenuta in queste pagine. In ogni caso questa nota di copyright non deve mai essere rimossa e deve essere riportata anche in utilizzi parziali.

Copyright 2000 Massimo Santini
