

IOI 1996 1.3 – Rete di scuole

Massimo Santini

1 settembre 2000

1 Problema

Un gruppo di scuole sono connesse mediante una rete telematica. Tra queste scuole è stato fatto un accordo secondo il quale ciascuna scuola mantiene una lista di altre scuole (dette “scuole riceventi”) a cui essa distribuisce software tramite la suddetta rete. Si noti che se la scuola B è nella lista di distribuzione della scuola A questo non significa che necessariamente A compaia nella lista di B .

L’obiettivo è scrivere un programma che calcoli il minimo numero di scuole che devono ricevere una copia di un nuovo software affinché esso raggiunga tutte le scuole collegate in rete se esso viene distribuito secondo l’accordo delle liste di distribuzione (compito A). Inoltre, ci si vuole assicurare che mandando un nuovo software ad una qualunque scuola soltanto, esso possa essere distribuito in seguito a tutte le scuole collegate. Per raggiungere tale scopo, in generale, sarà necessario modificare le liste di distribuzione aggiungendo opportunamente ad alcune di esse nuove scuole riceventi. Si chiede di calcolare il numero minimale di aggiunte che devono essere apportate alle liste così che a qualunque scuola venga mandato un software esso possa essere distribuito, in accordo alle nuove liste, a tutte le altre scuole (compito B).

1.1 Dati in ingresso

La prima linea del file `INPUT.TXT` contiene un intero N che rappresenta il numero di scuole collegate in rete ($2 \leq N \leq 100$). Le scuole sono identificate con i primi N interi positivi. Ciascuna delle successive N righe descrive una lista scuole riceventi, in particolare, la linea $i + 1$ contiene gli identificatori delle scuole riceventi della scuola i . Ogni lista è terminata da uno 0 così una lista vuota è rappresentata da una linea contenente uno 0 solamente.

1.2 Dati in uscita

Il programma realizzato deve scrivere due righe in un file denominato `OUTPUT.TXT`; la prima di esse deve contenere un intero positivo corrispondente alla soluzione del “compito A”. La seconda riga contiene un intero positivo o nullo corrispondente alla soluzione del “compito B”.

1.3 Esempio

A fronte del file `INPUT.TXT` dal seguente contenuto

```
5
2 4 3 0
4 5 0
0
0
1 0
```

il file `OUTPUT.TXT` deve contenere

```
1
2
```

2 Soluzione

La soluzione del problema può essere descritta mediante l'uso di *grafi semplici orientati (gsa)*. Consideriamo il gsa $G = \langle V, E \rangle$ dove V corrisponde all'insieme di scuole, ovvero $V = \{1, 2, \dots, N\}$ ed $E \subseteq V \times V = \{(i, j) : i, j \in V\}$ rappresenta le liste di distribuzione nel senso che $(i, j) \in E$ se e solo se la scuola j è nella lista di distribuzione della scuola i . Di seguito useremo la notazione $i \rightsquigarrow j$ per indicare che esiste in G un cammino (orientato) tra i e j .

Un insieme di vertici $D \subseteq V$ del grafo G è detto *dominatore per G* se per ogni nodo¹ $j \in V \setminus D$, esiste un nodo $i \in D$ tale che $i \rightsquigarrow j$; intuitivamente, D è un dominatore qualora ogni altro nodo di G può essere raggiunto da un cammino (orientato) che parta da qualche nodo in D . Viceversa, un *co-dominatore per G* è un insieme di vertici $D' \subseteq V$ tale che per ogni $i \in V \setminus D'$ esiste un $j \in D'$ tale che $i \rightsquigarrow j$; intuitivamente D' è un co-dominatore qualora per ogni altro nodo di G esiste un cammino (orientato) che arriva in qualche nodo in D' . Un grafo G' è detto *trasposto* del grafo G se $G' = \langle V, E' \rangle$, dove $E' = \{(j, i) : (i, j) \in E\}$; intuitivamente, il grafo trasposto di G è il grafo ottenuto “girando” il verso di tutti gli archi di G . Dalle definizioni date in questo paragrafo si può mostrare che un dominatore D di G è un co-dominatore di G' e che un co-dominatore D' di G è un dominatore di G' . Per finire, diremo che un gsa è *fortemente connesso* qualora per ogni coppia di vertici $i, j \in V$ (con $i \neq j$ esistono in G due cammini (orientati) $i \rightsquigarrow j$ e $j \rightsquigarrow i$).

Secondo questa terminologia, il “compito A” consiste nel trovare un dominatore di G contenente il numero minimale di elementi, mentre il “compito B” consiste nel determinare il numero minimale di archi M che è necessario aggiungere a G perché diventi fortemente connesso.

Mostreremo ora come $M = 0$ se G è fortemente connesso e che, altrimenti, $M = \max(|D|, |D'|)$ dove² D è un dominatore minimale di G e D' è un codominatore minimale di G .

Per ottenere tale risultato utilizzeremo due proposizioni riguardo un dominatore minimale D ed un co-dominatore minimale D' di G ; assumiamo (senza perdita di generalità³) che $|D| \leq |D'|$.

1. Se $D = \{p\}$ e $D' = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ (per qualche $k > 1$), allora aggiungendo i lati $(q_1, p), (q_2, p), \dots, (q_k, p)$ ad E il grafo G diventa fortemente connesso.
2. Se $|D| > 1$ allora esistono due nodi $p \in D$ e $q \in D'$ tali per cui aggiungendo il nuovo arco (q, p) ad E rende $D \setminus \{p\}$ dominatore del nuovo grafo e $D' \setminus \{q\}$ co-dominatore del nuovo grafo.

Diamo quindi la dimostrazione delle precedenti proposizioni:

1. Osserviamo che per qualsiasi $i, j \in V$ si ha che (essendo D' un co-dominatore) esiste un elemento $q_h \in D'$ tale che $i \rightsquigarrow q_h$ e che (essendo D dominatore) $p \rightsquigarrow j$. Quindi, grazie al nuovo arco, si ha $i \rightsquigarrow q_h \rightarrow p \rightsquigarrow j$, questo prova che $i \rightsquigarrow j$ (abbiamo indicato con $\rightarrow$ l'esistenza di un arco, o un cammino composto da un solo arco). Siccome i nodi sono presi arbitrariamente è possibile ripetere il ragionamento scambiando ovunque i con j ed ottenere che $j \rightsquigarrow i$, quindi che G con i nuovi lati è fortemente connesso.
2. Osserviamo che se $|D| > 1$ allora, essendo $|D'| \geq |D|$, anche $|D'| > 1$. Esisteranno quindi due nodi diversi p_1 e p_2 in D e due nodi diversi q_1 e q_2 in D' tali che⁴ $p_1 \rightsquigarrow q_1$ e $p_2 \rightsquigarrow q_2$; sia (q_1, p_2) il nuovo arco aggiunto ad E (quindi vengano tolti p_2 da D e q_1 da D'). Ora, ogni nodo i che era raggiungibile da p_2 con il cammino $p_2 \rightsquigarrow i$ nel nuovo grafo è raggiungibile da p_1 con il cammino $p_1 \rightsquigarrow q_1 \rightarrow p_2 \rightsquigarrow i$, quindi $D \setminus \{p_2\}$ è dominatore. Similmente, per ogni nodo j per cui $j \rightsquigarrow q_1$ nel vecchio grafo si avrà $j \rightsquigarrow q_1 \rightarrow p_2 \rightsquigarrow q_2$, col che $D' \setminus \{q_1\}$ è co-dominatore nel grafo col nuovo arco.

È chiaro che usando le due proposizioni precedenti si può ottenere, a partire da G non fortemente connesso, un insieme di $|D'|$ archi da aggiungere a G che lo renderanno fortemente connesso.⁵

¹ Con $A \setminus B$ indichiamo la differenza insiemistica tra gli insiemi A e B , ossia l'insieme di elementi di A non contenuti in B .

² Al solito $|A|$ indica il numero di elementi contenuti nell'insieme A .

³ Se così non fosse, basterebbe considerare il grafo trasposto.

⁴ Questo dipende dalla minimalità di D e D' . Per prima cosa, fissiamo due nodi $p'_1 \in D$ e $q'_1 \in D'$ per cui $p'_1 \rightsquigarrow q'_1$ (questo è sempre possibile per le proprietà di dominatore e codominatore). Sia ora $p' \in D' \setminus \{p'_1\}$, per minimalità di D esisterà un x tale che $p' \rightsquigarrow x$, ma nessun $p \in D \setminus \{p'\}$ è tale che $p \rightsquigarrow x$; sia quindi $q' \in D' \setminus \{q'_1\}$, per minimalità di D' esisterà un y tale che $y \rightsquigarrow q'$, ma nessun $q \in D' \setminus \{q'\}$ è tale che $y \rightsquigarrow q$. Se $x \rightsquigarrow y$ allora $p_2 = p' \rightsquigarrow x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow q' = q_2$, similmente, se $p' \rightsquigarrow y$, allora $p_2 = p' \rightsquigarrow y \rightsquigarrow q' = q_2$; altrimenti, se $x \rightsquigarrow q$ per qualche $q \in D' \setminus \{q'_1\}$, allora $p_2 = p' \rightsquigarrow x \rightsquigarrow q = q_2$ (in tutti i tre casi, $p_1 = p'_1$ e $q_1 = q'_1$). Resta da discutere il caso in cui q'_1 sia invece l'unico nodo di D' per cui $x \rightsquigarrow q'_1$. In questo caso, essendo D dominatore, deve esistere un $p \in D$ (eventualmente $p = p'_1$) tale che $p \rightsquigarrow y$; in questo caso, i due cammini sono $p_2 = p \rightsquigarrow y \rightsquigarrow q' = q_2$ e $p_1 = p' \rightsquigarrow x \rightsquigarrow q'_1 = q_1$.

⁵ Resta da dimostrare che la soluzione trovata è minimale, questo dipende dalla minimalità degli insiemi considerati.

Il problema quindi può essere risolto dato un algoritmo per calcolare un dominatore minimale di un grafo assegnato. La dimensione del dominatore minimale di G sarà la risposta al “compito A”, mentre la dimensione massima tra quelle del dominatore minimale per G e quello minimale per G trasposto darà la risposta al “compito B”.

Si consideri la seguente procedura:

```

1   $P \leftarrow \emptyset, D \leftarrow \emptyset$ 
2  while esiste  $p \in V \setminus P$  do
3      metti in  $R$  i nodi raggiungibili da  $p$ 
4       $P \leftarrow P \cup R$ 
5       $D \leftarrow D \setminus R$ 
6       $D \leftarrow D \cup \{p\}$ 

```

Evidentemente D alla fine della computazione è un insieme dominatore. Mostriamo di seguito che è anche minimale.

Sia per assurdo Q un dominatore minimale tale che $|Q| < |D|$. Osserviamo che per ogni $q \in Q$, siccome D è dominatore, esiste un $p \in D$ tale che $p \rightsquigarrow q$. D'altro canto, siccome Q è minimale, se $p \rightsquigarrow q$ allora $q \rightsquigarrow p$: infatti essendo Q dominatore, deve esistere $q' \in Q$ per cui $q' \rightsquigarrow p$; se $q' \neq q$ allora $Q \setminus \{q\}$ sarebbe dominatore in quanto tutti i nodi x raggiungibili da q con il cammino $q \rightsquigarrow x$ sarebbero raggiungibili anche da q' con il cammino $q' \rightsquigarrow p \rightsquigarrow q \rightsquigarrow x$. Questo significa che per ogni nodo $q \in Q$ esiste un $p \in D$ tale che $p \rightsquigarrow q$ (ossia $p \rightsquigarrow q$ e $q \rightsquigarrow p$); essendo $|D| > |Q|$ questo implica che esistano almeno due nodi diversi $p_1, p_2 \in D$ ed un nodo $q \in Q$ per cui $p_1 \rightsquigarrow q$ e $p_2 \rightsquigarrow q$ e quindi, in particolare $p_1 \rightsquigarrow p_2$. Sarà quindi stata eseguita l'istruzione 3 sia su p_1 che su p_2 (in qualche ordine), ma siccome p_1 e p_2 sono raggiungibili l'uno dall'altro non possono comparire entrambi in D per via dell'istruzione 5 (che a seconda dell'ordine di esecuzione avrebbe rimosso p_1 , o p_2).

Il contenuto di questo documento è protetto dalle leggi sul copyright e dalle disposizioni dei trattati internazionali. Questo documento può essere copiato (o comunque riprodotto) ed utilizzato liberamente dagli studenti, dagli istituti di ricerca, scolastici ed universitari afferenti ai Ministeri della Pubblica Istruzione e dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica per scopi istituzionali, non a fine di lucro. Ogni altro utilizzo o riproduzione (ivi incluse, ma non limitatamente a, le riproduzioni a mezzo stampa, su supporti magnetici o su reti di calcolatori) in toto o in parte è vietata, se non esplicitamente autorizzata per iscritto, a priori, da parte dell'autore.

L'informazione contenuta in questo documento è ritenuta essere accurata alla data della pubblicazione. Essa è fornita per scopi meramente didattici e non per essere utilizzata in progetti di impianti, prodotti, ecc. L'informazione contenuta in questo documento è soggetta a cambiamenti senza preavviso. L'autore non si assume alcuna responsabilità per il contenuto di queste pagine (ivi incluse, ma non limitatamente a, la correttezza, completezza, applicabilità ed aggiornamento dell'informazione). In ogni caso non può essere dichiarata conformità all'informazione contenuta in queste pagine. In ogni caso questa nota di copyright non deve mai essere rimossa e deve essere riportata anche in utilizzi parziali.